VJEŽBE IZ MATEMATIKE 1

Ivana Baranović
Miroslav Jerković

Lekcije 9 i 10

Elementarne funkcije.
Funkcije važne u primjenama

Vježbe iz Matematike 1.

9. i 10. Elementarne funkcije. Funkcije važne u primjenama

Zadatak 1 Napišite po jedan primjer za rastuću i padajuću linearnu funkciju.

Zadatak 2 Nađite linearnu funkciju čiji graf prolazi točkama $(0, 1)$ i $(1, -1)$. Je li ta funkcija rastuća ili padajuća? Napišite još tri točke kojima prolazi graf te funkcije.

Rješenje: Znamo da svaka linearna funkcija ima oblik $f(x) = ax + b$, gdje su a i b parametri (a je koeficijent smjera, a b odsječak na osi y). Pripadna veza između x i y koordinate glasi stoga $y = ax + b$. Uvrštavanjem zadanih točaka dobivamo sljedeći sustav od dvije jednadžbe u nepoznanicama a i b:

$$\begin{aligned} b &= 1 \\ a + b &= -1, \end{aligned}$$

rješavanjem kojeg odmah dobivamo da je $a = -2$, $b = 1$, pa tražena linearna funkcija glasi $f(x) = -2x + 1$. Kako je koeficijent smjera negativan, funkcija je padajuća.

Da bismo napisali još tri točke kojima prolazi graf te funkcije, dovoljno je u $y = -2x + 1$ uvrstiti neke tri vrijednosti za x (recimo $x = 2$, $x = 3$ i $x = 4$) i izračunati odgovarajući y).

Zadatak 3 Je li funkcija iz prethodnog zadatka bijekcija? Ako jest, nađite i nacrtajte grafove funkcija f i f^{-1}.

Rješenje: Da bismo dokazali da je funkcija $f(x) = -2x + 1$ bijekcija, treba pokazati da je injekcija i surjekcija:

(i) **f je injekcija:** mora vrijediti da za sve x_1 i x_2 takve da je $f(x_1) = f(x_2)$ nužno slijedi da je i $x_1 = x_2$. Računamo:

$$-2x_1 + 1 = -2x_2 + 1 \Rightarrow -2x_1 = -2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

i funkcija je očito injekcija.

(ii) **f je surjekcija:** mora vrijediti da za svaki $y_0 \in \mathbb{R}$ postoji $x_0 \in \mathbb{R}$ takav da je $f(x_0) = y_0$, što znači $-2x_0 + 1 = y_0$. No, odavdje možemo lako izračunati x_0:

$$-2x_0 + 1 = y_0 \Rightarrow -2x_0 = y_0 - 1 \Rightarrow x_0 = -\frac{1}{2}y_0 + \frac{1}{2}.$$

Dakle, traženi x_0 je $x_0 = -\frac{1}{2}y_0 + \frac{1}{2}$. Da je to dobar x_0 gotovo je očito, ali ipak provjeravamo da je $f(x_0) = y_0$:

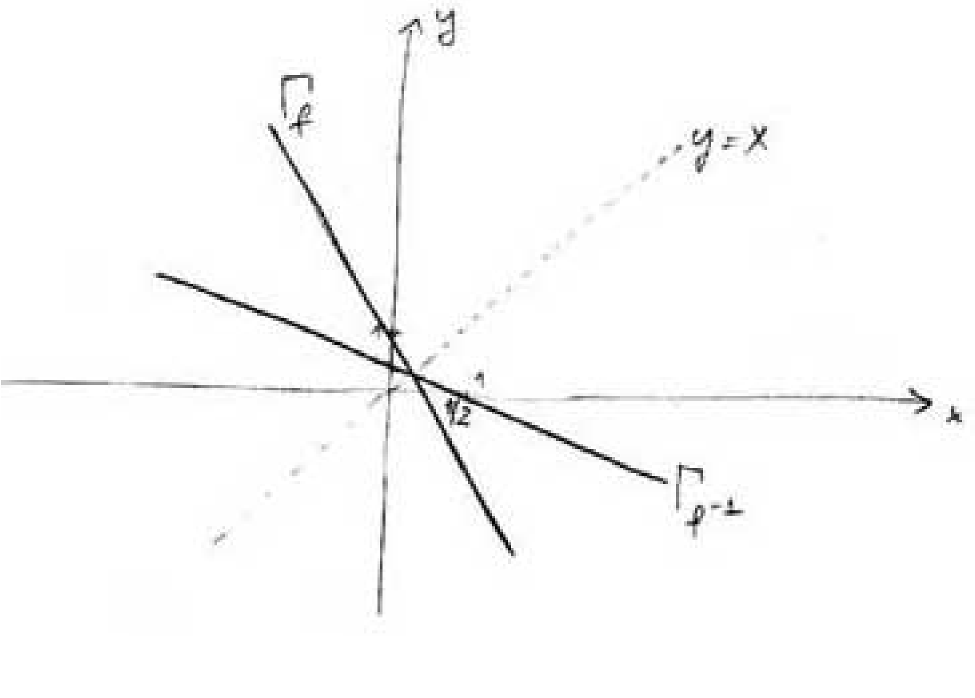
$$f(x_0) = -2x_0 + 1 = -2(-\frac{1}{2}y_0 + \frac{1}{2}) + 1 = y_0 - 1 + 1 = y_0,$$

što je i treablo dobiti. Ovu operaciju možemo obaviti za sve $y_0 \in \mathbb{R}$, pa je f očito surjekcija.

Dakle (jer je i injektivna i surjektivna) f je bijekcija, pa ima inverznu funkciju f^{-1}:

$$f(x) = -2x+1 \Rightarrow x = -2f^{-1}(x)+1 \Rightarrow 2f^{-1}(x) = -x+1 \Rightarrow f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}.$$

Još treba nacrtati grafove funkcija f i f^{-1}, što nije teško budući da su oni pravci. Koristimo pri crtanju informacije kao što su odsječak na osi y i koeficijent smjera. Primijetite da se graf funkcije f^{-1} dobiva zrcaljenjem grafa funkcije f obzirom na simetrali I i III kvadranta - pravac $y = x$:



Zadatak 4 Nađite kvadratnu funkciju čiji graf prolazi točkama $(0, 1)$, $(1, 1)$ i $(-1, 3)$. Izračunajte koordinate točke tjemena. Je li to tjeme u ovom slučaju točka lokalnog minimuma ili maksimuma? Nađite intervale rasta i pada ove funkcije, te napišite još tri točke kojima prolazi graf te funkcije.

Rješenje: Slično kao kod linearne funkcije, treba odrediti parametre koji definiraju kvadratnu funkciju. Kako se radi o funkciji $f(x) = ax^2 + bx + c$, vidimo da treba odrediti tri parametra, pa je za očekivati da će biti potrebno zadati i tri točke kroz koje graf funkcije mora prolaziti. Uvrštavanjem vrijednosti koordinata te tri točke u $y = ax^2 + bx + c$ dobivamo sustav

$$\begin{aligned} c &= 1 \\ a+b+c &= 1 \\ a-b+c &= 3, \end{aligned}$$

čije rješenje glasi: $a = 1$, $b = -1$, $c = 1$. Dakle, kvadratna funkcija koju smo tražili je $f(x) = x^2 - x + 1$.

Kako je koeficijent a pozitivan, graf ove kvadratne funkcije će biti kokavna parabola ("okrenuta prema gore"), pa će točka tjemena biti točka lokalnog minimuma. Računamo je prema formuli

$$T(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a}),$$

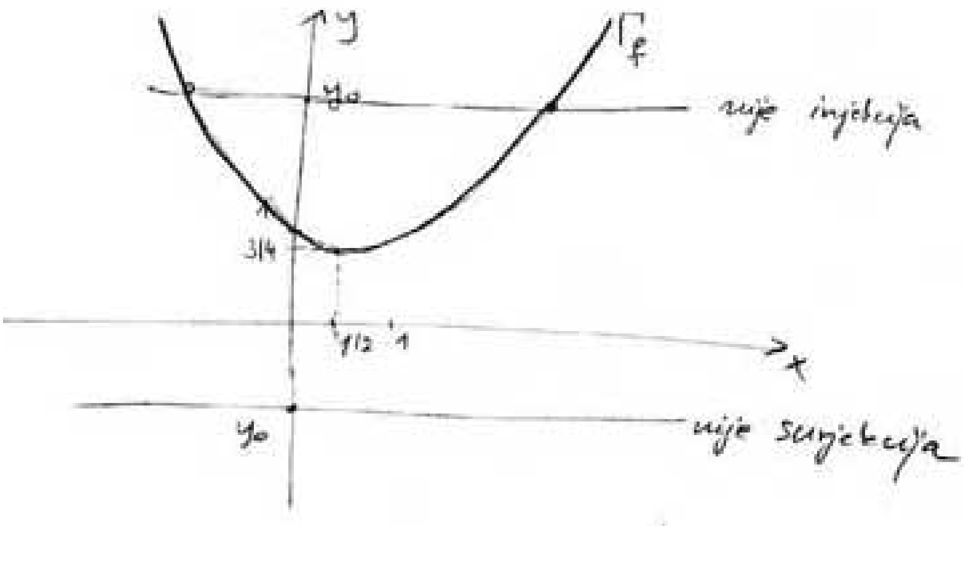
gdje je $D = b^2 - 4ac$ (tzv. "diskriminanta"). Uvrštavanjem dobivenih vrijednosti za a, b i c izlazi da je $T = (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ - to je dakle točka tjemena, ali ujedno i lokalnog minimuma.

U skladu lako se vidi (iz koveksnog oblika grafa i poznavanja točke tjemena) da funkcija pada na intervalu $< -\infty, \frac{1}{2} >$, a raste na intervalu $< \frac{1}{2}, \infty >$.

Da nađemo još tri točke kojima prolazi graf ove funkcije dovoljno je izabrati tri vrijednosti za x i uvrstiti ih u $y = x^2 - x + 1$ da dobijemo odgovarajuće vrijednosti za y.

Zadatak 5 Provjerite korištenjem garfa funkcije f iz prethodnog zadatka je li f bijekcija ako zadamo da su domena i kodomena čitav skup realnih brojeva? Ako nije, kako treba ograničiti kodomenu da ona postane surjekcija? Kako treba ograničiti domenu da ona postane injekcija?

Rješenje: Funkcija nije bijekcija, u što se možemo lako uvjeriti ako nacrtamo njen graf:



Naime, funkcija će biti bijekcija ako za svaki y_0 iz kodomene (svaki $y_0 \in \mathbb{R}$, tj. s $y-$osi) možemo naći **točno** jedan x_0 iz domene (točno jedan $x_0 \in \mathbb{R}$, tj. s $x-$osi) takav da je $f(x_0) = y_0$. To provjeravamo tako da povlačimo kroz y_0 pravac okomit na $y-$os, tražimo sjecište s grafom funkcije f i iz točke sjecišta povlačimo pravac okomit na $x-$os - na mjestu gdje taj pravac siječe $x-$os bi trebao biti traženi x_0. Dok je kod linearne funkcije takav postupak moguće provesti za svaki izbor y_0 s $y-$osi, lako vidimo da ovdje postoje sljedeći problemi:

(i) **f nije surjektivna:** za sve $y_0 < \frac{3}{4}$ (dakle, sve y_0 koji se nalaze "ispod" točke na $y-$ osi koja predstavlja $y-$koordinatu točke tjemena T) nije moguće provesti gore opisani postupak, jer pravac kroz takav y_0 okomit na $y-$os uopće neće sijeći graf funkcije f

(ii) **f nije injektivna:** za svaki $y_0 > \frac{3}{4}$ (dakle, sve y_0 koji se nalaze "iznad" točke na $y-$ osi koja predstavlja $y-$koordinatu točke tjemena T) pravac kroz y_0 okomit na $y-$os siječe graf funkcije f, ali ne u točno jednoj točki, već uvijek u dvije točke, što se kosi s defincijom injektivnosti.

Dakle, f nije bijekcija (kao, uostalom, niti jedna druga kvadratna funkcija). Međutim, moguće je **ograničiti** domenu i kodomenu da ona postane bijekcija:

(i) **ograničenje kodomene - postizanje surjektivnosti:** treba uzeti da je kodomena jednaka intervalu $[\frac{3}{4}, \infty>$ jer ćemo tada imati surjektivnost - ona zahtijeva da za svaki y_0 **postoji** x_0 takav da je $f(x_0) = y_0$, dakle **barem jedan** takav x_0 - a to će u slučaju ovakvog izbora kodomene sigurno biti ispunjeno

(ii) **ograničenje domene - postizanje injektivnosti:** možemo uzeti da je kodomena jednaka intervalu $<-\infty, \frac{1}{2}]$ **ili** $[\frac{1}{2}, \infty>$. Naime, injektivnost zahtijeva da za svaki y_0 iz kodomene postoji **najviše** jedan x_0 takav da je $f(x_0) = y_0$. S obzirom da parabola ima dva kraka, lijevi i desni, moramo se odlučiti za samo jedan od njih - točka tjemena (točnije, njena $x-$koordinata) govori kako moramo "podijeliti" domenu da ona definira injektivnu funkciju - ako se odlučimo za interval $<-\infty, \frac{1}{2}]$ odabrali smo lijevi krak parabole, a uz $[\frac{1}{2}, \infty>$ odlučili smo se za desni krak. Oba izbora su dobra, pa se ovdje možemo odlučiti za npr. desni krak, tj. definirati da je domena dana s $[\frac{1}{2}, \infty>$.

Dakle, možemo za $f(x) = x^2 - x + 1$ definirati $f : [\frac{1}{2}, \infty> \to [\frac{3}{4}, \infty>$ - tako definirana funkcija f bit će bijekcija.

Zadatak 6 Pokažite računski da funkcija iz prethodnog zadatka nije bijekcija.

Rješenje: Pokazujemo da $f(x) = x^2 - x + 1$ nije bijekcija:

(i) **f nije injekcija:** Treba pokazati da iz $f(x_1) = f(x_2)$ ne slijedi nužno da je $x_1 = x_2$:

$$x_1^2 - x_1 + 1 = x_2^2 - x_2 + 1$$
$$x_1^2 - x_2^2 - x_1 + x_2 = 0$$

$$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) - (x_1 - x_2) = 0$$
$$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 1) = 0.$$

Vidimo da očito postoje dvije mogućnosti:

(1) $x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$

(2) $x_1 + x_2 - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_2 + 1$,

pa ne slijedi nužno da je $x_1 = x_2$. Dakle, f nije injekcija.

(ii) **f nije surjekcija:** Treba vidjeti da za sve $y_0 \in \mathbb{R}$ ne postoji $x_0 \in \mathbb{R}$ takav da je $f(x_0) = y_0$:

$$x_0^2 - x_0 + 1 = y_0$$
$$x_0^2 - x_0 + 1 - y_0 = 0,$$

što možemo shvatiti kao jednadžbu po x_0. Ta će jednadžba imati **realna** rješenja (a takve x_0 tražimo) ako je diskriminanta D nenegativna:

$$D = b^2 - 4ac = 1 - 4 \cdot (1 - y_0) = 4y_0 - 3 \geq 0,$$

dakle ako je $y_0 \geq \frac{3}{4}$. Očito dakle samo za takve $y_0 \in \mathbb{R}$ postoje x_0 takvi da je $f(x_0) = y_0$ (njih dobivamo rješavanjem gornje kvadratne jednadžbe po x_0). Međutim, za $y < \frac{3}{4}$ takvi x_0 ne postoje, jer gornja kvadratna jednadžba uopće nema realnih rješenja. Dakle, ako za kodomenu uzmemo čitav skup realnih brojeva, f nije surjektivna.

Zadatak 7 Odredite intervale rasta i pada, točku tjemena, te točke presjeka s $x-$osi (realne nultočke) za sljedeće kvadratne funkcije:

a) $f(x) = -x^2 - x + 6$

b) $g(x) = x^2 + 3x - 3$

c) $h(x) = x^2 - 2x + 4$.

Rješenje: Točku tjemena funkcije $f(x) = ax^2+bx+c$ tražimo prema formuli

$$T = (-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a}),$$

gdje je $D = -b^2 + 4ac$. Pri tom vrijedi:

i) ako je $D > 0$ funkcija ima dvije realne nultočke dane s

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

i graf funkcije u dvije točke siječe $x-$os

ii) ako je $D = 0$ funkcija ima dvostruku realnu nultočku danu s

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

i graf funkcije u jednoj točki siječe (točnije, dodiruje) $x-$os - ta točka je ujedno i točka tjemena grafa

iii) ako je $D < 0$ funkcija nema realnih nultočaka (obje nultočke su kompleksni brojevi) - graf funkcije ne siječe $x-$os. Ove kompleksne nultočke su dane istom formulom kao realne nultočke pod i) (samo je sada $D < 0$ pa su x_1 i x_2 kompleksni).

Intervale rasta i pada dobijemo tako da $x-$koordinata točke tjemena ($x_0 = -\frac{b}{2a}$) dijeli domenu (čitav skup realnih brojeva) na dva intervala: $< -\infty, x_0 >$ i $< x_0, \infty >$ - jedan od ta dva intervala je interval rasta, a drugi pada, ovisno o tome je li $a > 0$ ili $a < 0$:

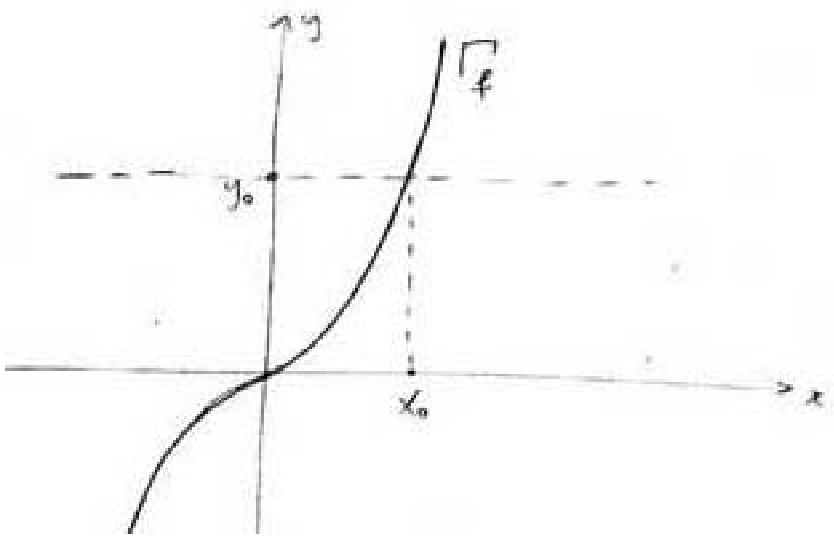
i) ako je $a > 0$ graf je "okrenut prema gore" (konveksan), tjeme predstavlja točku lokalnog minimuma i u skladu s tim $< -\infty, x_0 >$ je interval pada, a $< x_0, \infty >$ je interval rasta

ii) ako je $a < 0$ graf je "okrenut prema dolje" (konkavan), tjeme predstavlja točku lokalnog maksimuma i u skladu s tim $< -\infty, x_0 >$ je interval rasta, a $< x_0, \infty >$ je interval pada.

Pokušajte sami prema ovim pravilima riješiti zadatak.

Zadatak 8 Nacrtajte u istom koordinatnom sustavu grafove funkcija $f(x) = x^3$ i $g(x) = (x-1)^3 + 2$. Jesu li te funkcije bijekcije? Napišite f^{-1} i g^{-1} ako jesu.

Rješenje: Graf funkcije f je kubna parabola koja raste na cijeloj domeni, siječe x-os u $x = 0$, a $(0, 0)$ je ujedno i točka infleksije:



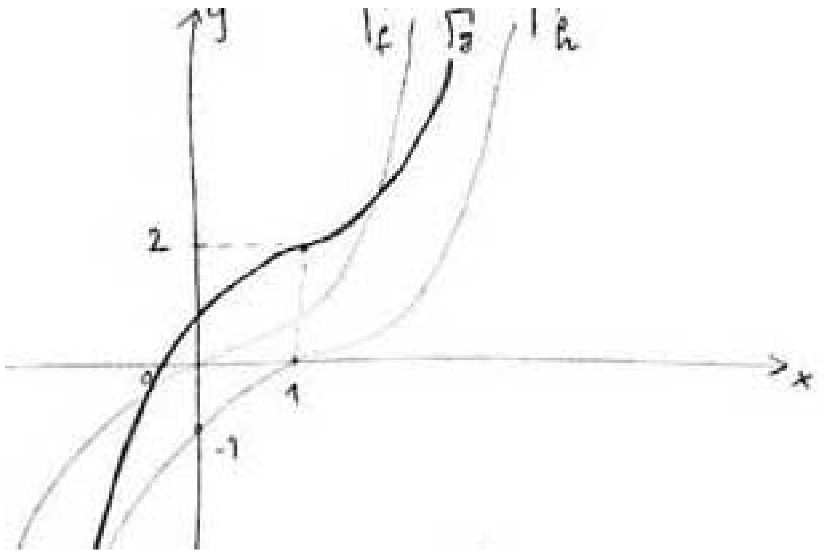
Iz grafa funkcije f vidimo da je ona bijekcija, jer za svaki $y_0 \in \mathbb{R}$ postoji **jedinstveni** $x_0 \in \mathbb{R}$ takav da je $f(x_0) = y_0$.

Da nađemo inverz funkcije f u izrazu $y = x^3$ radimo formalnu zamjenu varijabli x i y i računamo eksplicitno y:

$$x = y^3 \Rightarrow y = \sqrt[3]{x},$$

pa je $f^{-1} = \sqrt[3]{x}$.

Graf funkcije $g(x) = (x-1)^3 + 2$ dobiva se iz grafa funkcije f translacijom: -1 označava da graf funkcije $f(x) = x^3$ translatiramo udesno duž $x-$osi za 1 - time dolazimo do grafa pomoćne funkcije $h(x) = (x-1)^3$, dok $+2$ označava da graf funkcije $h(x) = (x-1)^3$ translatiramo za 2 prema gore duž $y-$osi - time dolazimo do grafa funkcije g:



Jasno je da je i ova funkcija bijekcija, jer je njen graf jednak grafu funkcije f, uz određeni translatorni pomak. Računamo g^{-1}:

$$x = (y-1)^3 + 2 \Rightarrow (y-1)^3 = x - 2 \Rightarrow y - 1 = \sqrt[3]{(x-2)} \Rightarrow y = \sqrt[3]{(x-2)} + 1,$$

odakle izlazi da je $g^{-1}(x) = \sqrt[3]{(x-2)} + 1$.

Zadatak 9 Napišite primjer jedne rastuće i jedne padajuće eksponencijalne funkcije.

Zadatak 10 Nacrtajte graf funkcije $f(x) = 3^x$, pokažite na svojstvima grafa da je bijekcija i nacrtajte na istoj slici inverznu funkciju te funkcije. Kako se zove ta inverzna funkcija?

Zadatak 11 Riješite jednadžbe:

a) $2^x = 8$

b) $\log_2 x = 3$

c) $4^x - 3 \cdot 2^x + 2$.

Rješenje:

i) Rješavamo zadatak djelovanjem inverznom funkcijom funkcije $f(x) = 2^x$, tj. funkcijom logaritmiranja po bazi 2 i koristimo svojstvo $\log_a a^x = x$:

$$2^x = 8 / \log_2$$

$$x = \log_2 8 = \log_2 2^3$$

$$x = 3.$$

ii) Kao u prethodnom zadatku, djelujemo inverznom funkcijom funkcije $f(x) = \log_2 x$, tj. eksponencijalnom funkcijom s bazom 2 i koristimo svojstvo $\log_a a^x = x$:

$$\log_2 x = 3 / 2^-$$

$$x = 2^3$$

$$x = 8.$$

iii) Prepoznajemo da je $4^x = (2^x)^2$, pa uz supstituciju $2^x = t$ imamo

$$t^2 - 3t + 2,$$

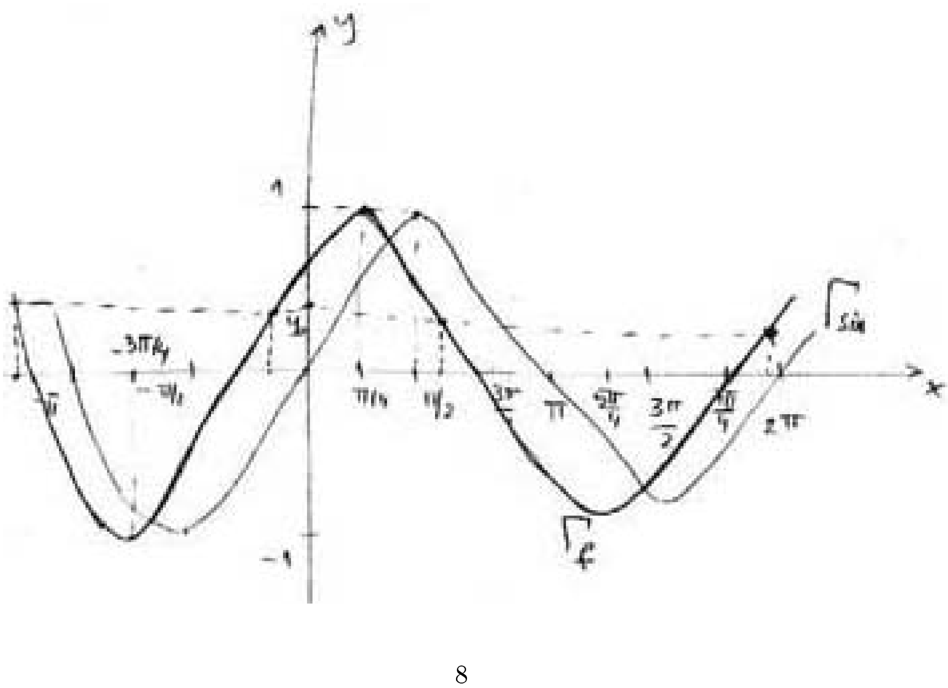
čija su rješenja dana s $t_1 = 1$, $t_2 = 2$. Stoga imamo dva rješenja:

$$2^x = 1 / \log_2 \Rightarrow x = \log_2 1 = 0$$

$$2^x = 2 / \log_2 \Rightarrow x = \log_2 2 = 1.$$

Zadatak 12 Pokažite da funkcija $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ dana s $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ nije injekcija.

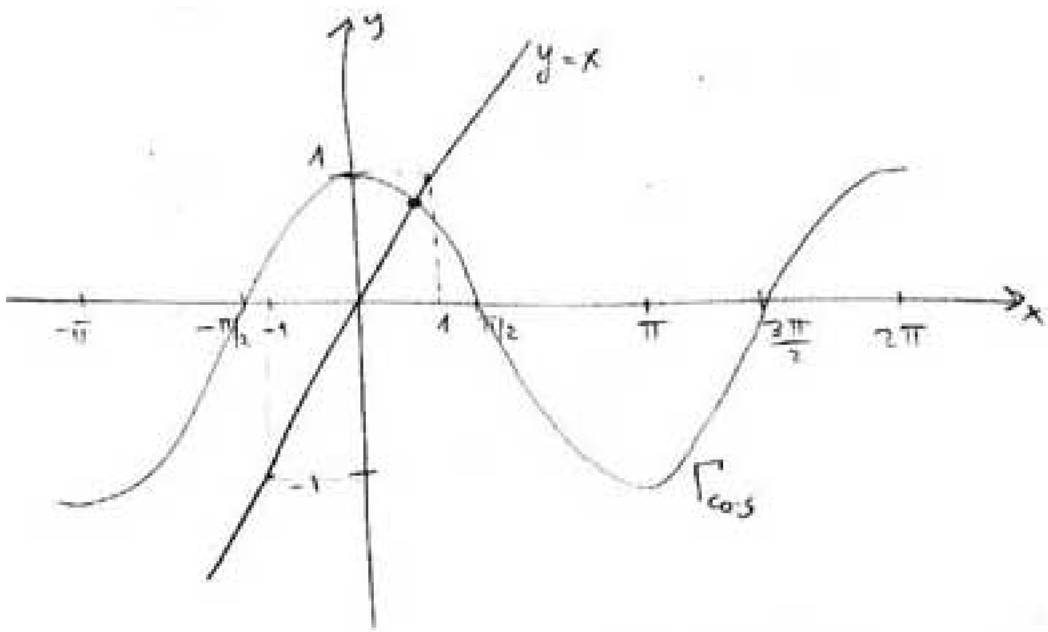
Rješenje: Graf funkcije f dobivamo pomakom grafa funkcije $g(x) = \sin x$ za $\frac{\pi}{4}$ ulijevo duž $x-$osi:



Očito je da ta funkcija nije injekcija, jer za svaki $y_0 \in [-1, 1]$ postoji beskonačno mnogo različitih x_0 takvih da je $f(x_0) = y_0$ - naime, pravac kroz y_0 okomit na $y-$os siječe graf funkcije f u beskonačno mnogo točaka.

Zadatak 13 Pokažite grafički da jednadžba $\cos x = x$ ima samo jedno realno rješenje.

Rješenje: Ovu ćemo jednadžbu riješiti tako da nacrtamo grafove dvije funkcije $f(x) = \cos x$ i $g(x) = x$ - jednadžba $f(x) = g(x)$ (tj. upravo $\cos x = x$) ima geometrijskog značenje presjeka krivulja $y = f(x)$ i $y = g(x)$ - broj točaka presjeka tih krivulja odgovara broju realnih rješenja zadane jednadžbe. Nacrtajmo na istoj slici grafove tih funkcija:



Vidimo da postoji samo jedna točka presjeka tih krivulja, pa i jednadžba ima samo jedno rješenje.